

一类扩展的协作竞争模型及其定性分析*

吴 红, 王远世

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 将已有文献中一类特殊的两种群协作竞争模型扩展到一般的多种群协作竞争模型。证明在一般的两种群协作竞争模型中, 竞争种群在低密度时的相互协作能促进双方的共生, 并能提高其环境容纳量, 从而证明并拓展了已有结论; 同时, 完整分析一类具体的两种群协作竞争模型, 证明该系统不存在周期解, 并从定性与定量两方面揭示了协作关系在促进竞争者共生及环境容纳量提升方面的内在机理, 深化了已有结论。

关键词: 种群协作; 竞争模型; 周期解; 稳定性

中图分类号: O175.13 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 05-0011-04

自从 Lotka-Volterra (LV) 模型由 Lotka 和 Volterra 提出以来, 对该模型及其扩展模型的研究就一直是生态学家及数学家关注的热点之一。LV 模型揭示了一系列有趣的生态现象。例如, 两种群 LV 竞争模型^[1]表明, 两个食用相同或类似食物的种群难以在同一环境中共生, 其中竞争力强且环境容纳量大的种群将生存下来, 而竞争力弱且环境容纳量小的种群将灭绝。与此形成对照的是, 两种群 LV 协作模型表明, 存在互惠关系的两个种群不仅能在同一环境中共生, 而且能促进双方环境容纳量的提高。由于上述模型中的种群关系或者是纯竞争, 或者是纯协作, 因此, 它们不能描述种群间的关系呈既协作又竞争的情形, 即: 当一种群在环境中的密度较高时, 它对其它种群表现为竞争; 而当其密度较低时, 它对其它种群表现为协作。这种情形在实际的生态环境中大量存在。在文 [2] 中, 当食肉动物较多时, 不同群落的食肉动物之间因食用相同的食物而呈竞争关系; 而当其数量较少时, 不同群落的食肉动物之间因联合捕猎提高了捕猎效率而呈协作关系。

为描述这种时而协作时而竞争的种群关系, 文 [3-5] 提出了种群协作竞争模型。文 [4-5] 的分析表明, 竞争种群间的协作促进了双方的共生, 并能提高其环境容纳量, 进而提高其竞争力与生存能力。但文 [4-5] 考虑的是一个特殊的具体方程, 且该方程的等倾线含双曲线, 而 LV 方程的等倾线皆为直线, 故两者在定量关系方面不具有可比性。因此, 对这种有趣的关系建立一般的、具有定

量可比性的数学模型以揭示其中的内在机理, 具有重要的意义。

1 扩展模型及分析

文 [4-5] 基于一系列实际观测到的生态现象, 构造了一类两种群协作竞争模型:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= r_1 x_1 [c_1 - x_1 - a_1 (x_2 - b_2)^2] \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 [c_2 - x_2 - a_2 (x_1 - b_1)^2]\end{aligned}\quad (1)$$

其中, x_i 表示第 i 个种群的密度, 参数 r_i, a_i, b_i, c_i 均为正常数, $\dot{x}_i = dx_i/dt, i = 1, 2$ 。对 (1) 式中的第一个方程, 易见 $r_1(c_1 - a_1 b_2^2)$ 为种群 1 的固有增长率, 令 $f_1 = c_1 - x_1 - a_1(x_2 - b_2)^2$, 则有 $\partial f_1 / \partial x_2 = -2a_1(x_2 - b_2)$, 故种群 2 当 $x_2 < b_2$ 时对种群 1 呈协作关系, 反之则呈竞争关系。类似地可以讨论 (1) 式中的第二个方程。

下面将系统 (1) 扩展至一般的 n 种群协作竞争系统:

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

其中, x_i 表示第 i 个种群的密度, 存在 $b_i > 0$, 当 $x_i < b_i$ 时, $\partial f_j / \partial x_i > 0$; 当 $x_i > b_i$ 时, $\partial f_j / \partial x_i < 0$, $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$ 。

考虑两种群协作竞争系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2 f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (3)$$

其中函数 $f_1, f_2 \in C^1$, 且满足下列三个条件:

(H1) 只有一个物种时, 按极限增长。即存在 $c_1 > 0, c_2 > 0$, 使得 $0 \leq x_1 < c_1$ 时 $f_1(x_1, 0) > 0$;

* 收稿日期: 2008-03-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10771223)

作者简介: 吴红 (1966 年生), 女, 副教授; E-mail: wuhong@mail.sysu.edu.cn

$x_1 > c_1$ 时 $f_1(x_1, 0) < 0$; $0 \leq x_2 < c_2$ 时 $f_2(0, x_2) > 0$; $x_2 > c_2$ 时 $f_2(0, x_2) < 0$ 。

(H2) 任一物种的成员数过多, 两物种都不能增长。即存在 $K > 0$, 使得 $x_1 \geq K$ 或 $x_2 \geq K$ 时 $f_1(x_1, x_2) \leq 0$ 且 $f_2(x_1, x_2) \leq 0$ 。

(H3) 任一物种在低密度时对对方呈协作关系, 在高密度时则呈竞争关系。即存在 $b_1 > 0, b_2 > 0$, 使得 $0 \leq x_i < b_i$ 时 $\partial f_j / \partial x_i > 0$; $x_i > b_i$ 时 $\partial f_j / \partial x_i < 0, i \neq j, i, j = 1, 2$ 。

在带形区域 $0 \leq x_1 < c_1$ 上, $f_1(x_1, x_2) = 0$ 定义了一等倾线 $l_1: x_2 = g_1(x_1)$, 且 $x_2 > b_2$, 见图 1。事实上, 任取一点 $x_1^0 \in [0, c_1]$, 令 $h_1(x_2) = f_1(x_1^0, x_2)$ 。由 (H1), 有 $h_1(0) = f_1(x_1^0, 0) > 0$ 。由 (H2), 有 $h_1(L) \leq 0$ 。故 $h_1(x_2) = 0$ 在 $(0, L]$ 有根。再由 (H3) 知此根唯一, 且根 $x_2^0 > b_2$ 。记这段曲线为 l_1 , 它与纵轴的交点记为 c_2^* , 见图 1。

类似地, 可证在带形区域 $0 \leq x_2 < c_2$ 上, $f_2(x_1, x_2) = 0$ 定义了一等倾线 $l_2: x_1 = g_2(x_2)$, 且 $x_1 > b_1$; 在带形区域 $0 \leq x_2 < b_2$ 上, $f_1(x_1, x_2) = 0$ 定义了一等倾线 $l_{11}: x_2 = g_{11}(x_1)$, 且 $x_1 > c_1$; 在带形区域 $0 \leq x_1 < b_1$ 上, $f_2(x_1, x_2) = 0$ 定义了一等倾线 $l_{21}: x_1 = g_{21}(x_2)$, 且 $x_2 > c_2$, 见图 1。

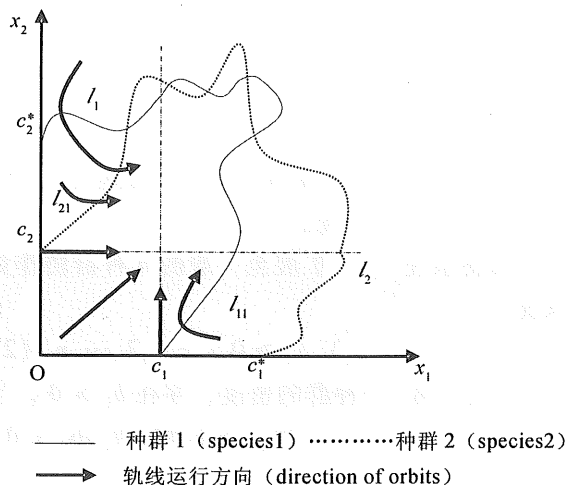


图 1 协作竞争时的两种群共生图

Fig. 1 The two species in (3) coexist

由图 1 中的相图分析结果, 有

定理 1 假设条件 (H1), (H2) 和 (H3) 成立。则系统 (3) 中的种群能共生, 若

$$c_1 < c_1^*, c_2 < c_2^* \quad (4)$$

定理 1 表明低密度时的协作有助于提高竞争种群的环境容纳量。事实上, 在等倾线 l_{11} 上有 $x_1 > c_1$, 因此当在此线上存在稳定平衡点时, 种群 1 的

容纳量就超过了其独处时的最大容纳量。类似地可以讨论种群 2 的情形。这种环境容纳量的提高在纯竞争的情形不会发生, 详见文 [1]。

定理 1 还表明低密度时的协作有助于竞争种群的共生。考虑两种群竞争系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 F_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2 F_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5)$$

设 F_1, F_2 满足条件 (H1) 和 (H2), 且 $\partial F_1 / \partial x_2 < 0, \partial F_2 / \partial x_1 < 0$ 。由文 [1] 知系统 (5) 中的两竞争种群能共生, 若

$$c_1 < c_1^{**}, c_2 < c_2^{**} \quad (6)$$

其中 c_1^{**} 是 $F_2(x_1, 0) = 0$ 的根, 而 c_2^{**} 是 $F_1(0, x_2) = 0$ 的根。下面说明条件 (4) 比条件 (6) 更容易得到满足。事实上, c_1^* 是 $f_2(x_1, 0) = 0$ 的根, 因 $x_1 < b_1$ 时, $\partial f_2 / \partial x_1 > 0$; $x_1 > b_1$ 时, $\partial f_2 / \partial x_1 < 0$, 故 $f_2(x_1, 0)$ 当 $x_1 < b_1$ 时单调上升, 当 $x_1 > b_1$ 时单调下降后才在 c_1^* 处达到零点。而由 $\partial F_2 / \partial x_1 < 0$ 知, $F_2(x_1, 0)$ 始终是严格单调下降, 并在 c_1^{**} 处达到零点。因此在同等初值下, 一般来说应有 $c_1^{**} < c_1^*$, 在下节我们将给出一个具体的例子。类似可以讨论 $c_2^{**} < c_2^*$ 的情形。

2 一类协作竞争模型

文 [4-5] 通过比较系统 (1) 与 LV 竞争模型和 LV 协作模型稳定平衡点与不稳定平衡点的个数之比, 说明了协作竞争系统中的协作促进了种群的共生, 且其中的竞争促进了系统的稳定。但是, 方程 (1) 的等倾线为二次曲线, 而 LV 模型的等倾线为直线, 将两者的稳定平衡点个数进行比较, 对后者有失公允。同时, 文 [4-5] 对协作竞争系统的内在机理缺乏完整的分析。本节将通过一类近似于线性的协作竞争模型, 从定性与定量两方面完整地分析协作竞争系统的内在机理。这类系统的等倾线由两个直线段构成: 种群间协作时, 系统等同于 LV 协作模型; 种群间竞争时, 系统等同于 LV 竞争模型。具体方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r_1 x_1 (c_1 + a_1 b_2 - x_1 - a_1 |x_2 - b_2|^*) \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 (c_2 + a_2 b_1 - x_2 - a_2 |x_1 - b_1|^*) \end{aligned} \quad (7)$$

其中, x_i 表示第 i 个种群的密度, 参数 r_i, a_i, b_i, c_i 均为正常数, $i = 1, 2$ 。函数 $|x_1 - b_1|^*$ 是函数 $|x_1 - b_1|$ 在尖点 $(b_1, 0)$ 一个足够小邻域光滑化后得到的函数 (可通过二次样条实现), 见图 2。类似可给出函数 $|x_2 - b_2|^*$ 的解释。

定理 2 系统 (7) 不存在周期解。

证明 构造 Dulac 函数 $B(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{-1}$,

有

$$\frac{\partial(Bf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(Bf_2)}{\partial x_2} = -\frac{r_1}{x_2} - \frac{r_2}{x_1} < 0$$

由 Dulac 定理 [1] 知, 系统 (7) 不存在周期解。证毕。

由定理 2 及相图分析法, 可得到系统 (7) 的全局定性图, 如图 2 所示。于是, 系统 (7) 中的两种群能共生, 若

$$2b_1 + c_1/a_1 > c_2, 2b_2 + c_2/a_2 > c_1 \quad (8)$$

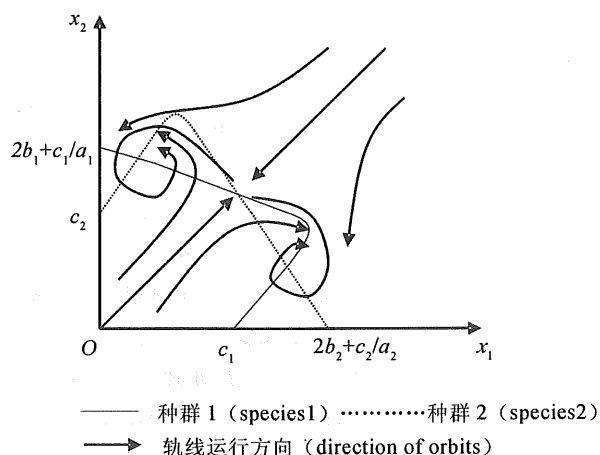


图2 系统 (7) 的全局定性图

Fig. 2 The global qualitative figure of (7)

考虑与系统 (7) 相对应的 LV 竞争模型

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r_1 x_1 (c_1 - x_1 - a_1 x_2) \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 (c_2 - x_2 - a_2 x_1) \end{aligned} \quad (9)$$

由文 [1] 知, 系统 (9) 中两种群共生, 若

$$c_1/a_1 > c_2, c_2/a_2 > c_1 \quad (10)$$

比较 (8) 与 (10), 由 $b_1 > 0, b_2 > 0$, 知条件 (8) 比 (10) 更易达到, 故系统 (7) 中的协作促进了种群共生。由 (8) 与 (10) 还可以定量地分析协作对种群共生所起的作用。由 (10) 知, 若 $c_1/a_1 < c_2$, 或 $c_2/a_2 < c_1$, 则两个竞争种群不能共生。但当其在低密度存在协作, 即有 $b_1 > 0, b_2 > 0$ 时, 只要协作的区域 b_1, b_2 满足式 (8), 则两个协作竞争种群能共生。我们还可以从方程 (7) 与 (9) 的表达式给出协作能够促进共生的内在机理。当 $x_1 > b_1, x_2 > b_2$ 时, 在系统 (7) 与 (9) 中两种群都呈竞争状态, 但来自对方的负反馈分别为 “ $-a_j(x_j - b_j)$ ” 和 “ $-a_j x_j$ ”, 由于前者大于后者, 故在系统 (7) 中竞争强度被削弱, 从而促进了双方的共生。

系统 (7) 中低密度时的协作能提高种群的环

境容纳量。在图 2 中, 种群 2 的等倾线 (虚线) 上, 当 $0 < x_1 < 2b_1$ 时, 有 $x_2 > c_2$ 。因此, 在该区域的稳定平衡点上 (见图 2), 种群 2 的值超过了其单独生存时的最大环境容纳量 c_2 。类似地可以讨论种群 1 的情形。因纯竞争系统 (9) 对应于 $b_1 = b_2 = 0$, 故系统 (9) 不可能出现种群容纳量的提升。

系统 (7) 中低密度时的协作对竞争种群双方都是有利的。由图 2 知, 几乎所有解均收敛于两个稳定平衡点。初值较大者 (强者) 最终达到的稳定态高于其独处时的最大容纳量, 而初值较小者 (弱者) 能持久生存, 而在纯竞争系统, 弱者将灭绝。

种群在高密度时的竞争还能促进系统的稳定。考虑与系统 (7) 相对应的 LV 协作模型

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r_1 x_1 (c_1 - x_1 + a_1 x_2) \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 (c_2 - x_2 + a_2 x_1) \end{aligned} \quad (11)$$

由文 [1] 知, 若 $a_1 a_2 \geq 1$, 则系统 (11) 中两种群均将趋于无穷, 从而出现一个不稳定的生态, 因为有限的环境不能容纳无穷的种群。但是, 在系统 (7) 中, 因 $x_1 > b_1$ 或 $x_2 > b_2$ 时, 来自对方的反馈由协作变为竞争, 即由正反馈变为负反馈, 于是, 其趋于无穷的趋势被遏制, 当条件 (10) 满足时, 两种群将共生并趋于一个稳定的平衡态。

由于方程 (1) 的等倾线为二次曲线, 而 LV 模型的等倾线为直线, 故两者的结论在定量关系上不具有可比性。而模型 (7) 的等倾线由直线段构成, 实际上为模型 (9) 与 (10) 的直线等倾线的光滑连结。因此, 由 (7) 可定量给出低密度时种群的合作区域, 以保证竞争种群的共生。

参考文献:

- [1] HIRSCH M, SMALE S, DEVANEY R. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to Chaos [M]. New York: Elsevier Pte Ltd, 2007.
- [2] RITA H, RANTA E. Competition in a group of equal foragers[J]. Am Naturalist, 1998, 152(1): 71-81.
- [3] WANG Y, WU H. Dynamics of a macroscopic model characterizing mutualism of search engines and web sites [J]. Physica A, 2006, 363: 537-550.
- [4] ZHANG Z. Mutualism or cooperation among competitors promotes coexistence and competitive ability[J]. Ecological Modelling, 2003, 164: 271-282.
- [5] ZHANG B, ZHANG Z, TAO Y. Stability analysis of a two-species model with transitions between population interactions[J]. J Theoretical Biology, 2007, 248: 145-153.

(下转第 17 页)

参考文献:

- [1] HUPPERT B. Endliche Gruppen I [M]. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1967: 1 – 500.
- [2] ORE O. Contributions to the theory of finite groups [J]. Duke Math J, 1939, 5: 431 – 460.
- [3] KEGAL O H. Sylow Gruppen and subnormalteiler endlicher gruppen [J]. Math Z, 1962, 78: 205 – 221.
- [4] WANG Y. On c -normality and its properties [J]. J Algebra, 1996, 180: 954 – 965.
- [5] SKIBA A N. On weakly s -permutable subgroups of finite groups [J]. J Algebra, 2007, 315: 192 – 209.
- [6] LI Y, WANG Y. The influence of minimal subgroups on the structure of finite groups [J]. Proc Amer Math Soc, 2003, 131: 337 – 341.
- [7] LI Y, WANG Y, WEI H. The influence of π -quasinormality of some subgroups of a finite group [J]. Arch Math, 2003, 81: 245 – 252.
- [8] WEI H. On c -normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups [J]. Comm Algebra, 2001, 29(5): 21 – 93.
- [9] WEI H, WANG Y, LI Y. On c -normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups II [J]. Comm Algebra, 2003, 31(10): 4807 – 4816.
- [10] SRINIVASAN S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups [J]. Israel J Math, 1980, 35: 210 – 214.
- [11] LI D, GUO X. The influence of c -normality of subgroups on structure of finite groups [J]. Comm Algebra, 1998, 26(6): 1913 – 1922.
- [12] LI D, GUO X. The influence of c -normality of subgroups on structure of finite groups II [J]. J Pure App Algebra, 2000, 150: 53 – 60.
- [13] DOERK K, HAWKES T. Finite Soluble Groups [M]. Berlin-New York: de Gruyter, 1992: 1 – 800.

An Equivalent Condition of the p -nilpotent GroupHUANG Yu-jian¹, LI Yang-ming²

(1. Guangdong Industry Technical College, Guangzhou 510300, China;

2. Department of Mathematics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510310, China)

Abstract: For the purpose of studying the detail structure of a finite group G , some proper conditions are implemented to a kind of subgroups of Sylow p -subgroup of G , then an equivalent condition of G being a p -nilpotent group is gotten by applying the minimal counterexample method. This result is a generalization of recent results in this aspect.

Key words: weakly s -permutable subgroup; p -nilpotent group; Sylow subgroup

(上接第 13 页)

An Extended Mutualism-competition Model and its Qualitative Analysis

WU Hong, WANG Yuan-shi

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A previous competition and mutualism model of two species is extended to a general competition and mutualism model of multiple species. By the analysis of the general competition and mutualism model of two species, it is proved that mutualism promotes coexistence and carrying capacities of the competitors. The mechanism that how mutualism promotes coexistence and carrying capacities of the competitors is shown by analyzing a special competition and mutualism model. It is also shown that both the species benefit from the mutualism at low density.

Key words: species' mutualism; competition model; periodic orbit; stability